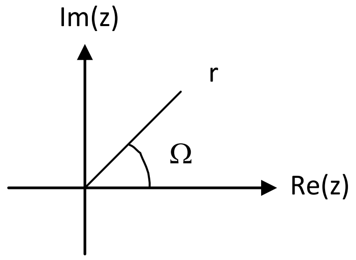
III. TRANSFORMASI Z

3.1. Pengertian

Transformasi Z memainkan peran yang sama dalam analisis sinyal waktu diskret dan sistem LTI (Invarian Waktu Linear) sebagai transformasi Laplace dalam analisis waktu kontinu dan sistem LTI. Sebagai contoh, di dalam domain-Z (bidang–Z kompleks) konvolusi dua sinyal domain waktu ekivalen dengan perkalian transformasi-Z yang berhubungan. Transformasi-Z sinyal waktu diskret x(n) didefinisikan sebagai deret pangkat:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n}$$

di mana z adalah suatu variabel bilangan komplek, yaitu $z = re^{j\Omega}$.



karena transformasi Z adalah deret pangkat tak berhingga, transformasi ini hanya berlaku untuk nilai-nilai yang deretnya konvergen. Daerah konvergensi (ROC) X(z) adalah himpunan seluruh nilai z agar X(z) mencapai nilai berhingga. Jadi setiap waktu kita menyebutkan transformasi z kita menunjukkan ROC-nya.

contoh:

tentukan transformasi Z sinyal-sinyal durasi berhingga berikut:

1. $X_1(n) = \{1,2,5,7,0,1\}$
2. $X_2(n) = \{0,0,1,2,5,7,0,1\}$
3. $X_3(n) = \{2,4,5,7,0,1\}$
4. $X_4(n) = \delta(n)$
5. $X_5(n) = \delta(n-k)$, $k > 0$
6. $X_6(n) = \delta(n+k)$, $k > 0$

Jawab:

a. $X_1(z) = 1 + 2z^{-1} + 3z^{-2} + 5z^{-3} + 7z^{-4} + z^{-6}$; **ROC**: $z \neq 0$
b. $X_2(z) = z^{-2} + 2z^{-3} + 5z^{-4} + z^{-6}$; **ROC**: $z \neq 0$
c. $X_3(z) = 2z^{2} + 4z + 5 + 7z^{-1} + z^{-3}$; **ROC**: $z \neq 0$ dan $z \neq \infty$
d. $X_4(z) = 1$

e. $X_5(z) = z^{-k}$; **ROC;** $z \neq 0$
f. $X_6(z) = z^{k}$; **ROC;** $z \neq \infty$

Dari contoh di atas dengan mudah bahwa ROC untuk sinyal durasi-berhingga adalah seluruh bidang-z kecuali mungkin titik z = 0 dan/atau z = ∞.

Dalam banyak kasus kita dapat menyatakan jumlah deret berhingga dan tak-berhingga untuk transformasi-z dalam persamaan bentuk-tertutup.

Contoh:

Tentukan transformasi-z dari sinyal

$$x(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$$

Jawab:

Sinyal x(n) terdiri dari jumlah tak berhingga dari nilai-nilai tidak nol

$$x(n) = \{1, (\frac{1}{2}), (\frac{1}{2})^2, (\frac{1}{2})^3, \ldots, (\frac{1}{2})^n, \ldots\}$$

Transformasi-z dari x(n) adalah deret pangkat tak-berhingga

$$X(z) = 1 + \frac{1}{2}z^{-1} + (\frac{1}{2})^2 z^{-2} + (\frac{1}{2})^n z^{-n} + \cdots$$

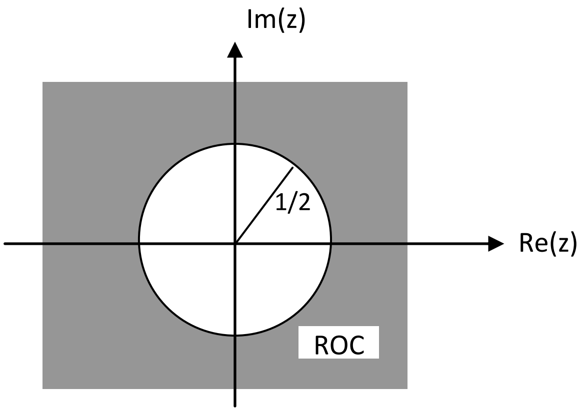
$$= \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{1}{2})^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{1}{2} z^{-1})^n$$

Inilah deret geometri tak-berhingga, jika (1/2) z^{-1} = A, maka persamaan di atas dapat dituliskan sebagai:

$$X(z) = 1 + A + A^2 + A^3 + \ldots = \frac{1}{1-A} \quad \text{jika } |A| \leq 1$$

Konsekuensinya, untuk $\left|\frac{1}{2}z^{-1}\right| \leq 1$, atau ekuivalennya untuk $|z| \geq \frac{1}{2}$, X(z) konvergen untuk

$$X(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}, \qquad \text{ROC: } |z| > \frac{1}{2}$$



Apabila variabel kompleks dinyatakan dalam bentuk polar sebagai

$$z = r e^{j\theta}$$

Dengan r = |z| dan θ = ∠ z. Maka X(z) dapat dinyatakan sebagai

$$X(z)|_{z=re^{j\theta}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) r^{-n} e^{-j\theta n}$$

ROC dari X(z), |X(z)| < ∞. Tetapi

$$\begin{aligned} |X(z)| &= \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) r^{-n} e^{-j\theta n} \right| \\ &\leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n) r^{-n} e^{-j\theta n}| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n) r^{-n}| \end{aligned}$$

Contoh:

Tentukan transformasi-z dari sinyal

$$x(n) = \alpha^n u(n) = \begin{cases} \alpha^n, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$

Jawab:

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha z^{-1})^n$$

Jika$|az^{-1}| < 1$ atau ekuivalennya, $|z| > |a|$, deret pangkat ini konvergen untuk $1/(1-az^{-1})$.

Jadi kita mempunyai pasangan transformasi-z

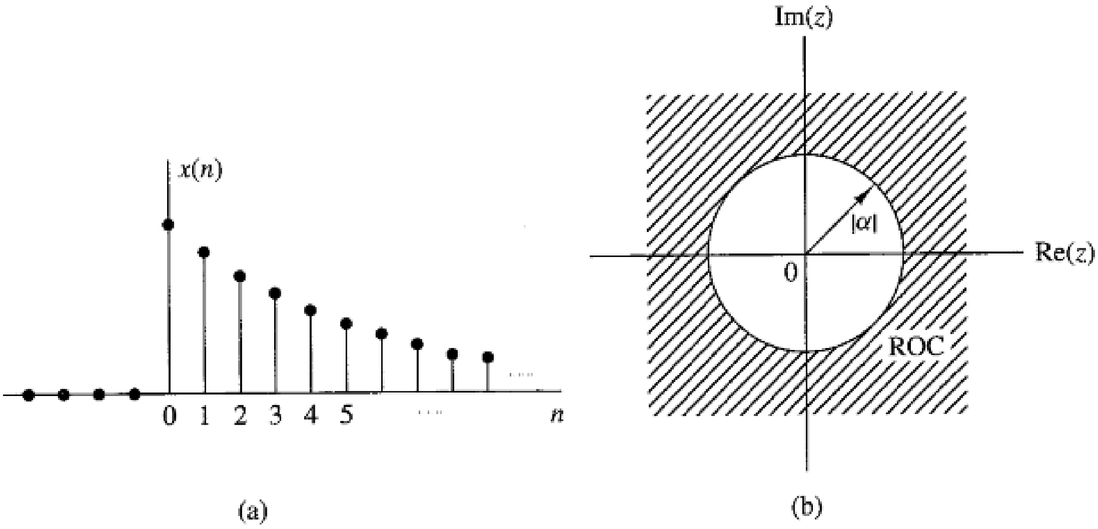


Figure 3.1.2 The exponential signal $x(n) = \alpha^n u(n)$ (a), and the ROC of its z-transform (b).

$$\boxed{x(n) = \alpha^n u(n) \overset{z}{\longleftrightarrow} X(z) = \frac{1}{1-\alpha z^{-1}}, \qquad \text{ROC: } |z| > |\alpha|}$$

ROC adalah bagian luar lingkaran yang mempunyai jari-jari $|\alpha|$. Jika kita mengatur $\alpha = 1$, kita memperoleh transformasi-z sinyal step unit.

$$x(n) = u(n) \overset{z}{\longleftrightarrow} X(z) = \frac{1}{1-z^{-1}}, \qquad \text{ROC: } |z| > 1$$

Contoh:

Tentukan transformasi-z sinyal

$$x(n) = -\alpha^n u(-n-1) = \begin{cases} 0, & n \geq 0 \\ -\alpha^n, & n \leq -1 \end{cases}$$

Jawab:

Dari definisi

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} (-\alpha^n) z^{-n} = -\sum_{l=1}^{\infty} (\alpha^{-1} z)^l$$

Dengan l = -n . menggunakan rumus

$$A + A^2 + A^3 + \cdots = A(1 + A + A^2 + \cdots) = \frac{A}{1-A}$$

Bila |A| <1 menghasilkan

$$X(z) = -\frac{\alpha^{-1}z}{1-\alpha^{-1}z} = \frac{1}{1-\alpha z^{-1}}$$

Yang menyatakan bahwa $|\alpha^{-1} z| < 1$ atau eluivalennya $|z| < |\alpha|$. Jadi

$$x(n) = -\alpha^n u(-n-1) \overset{z}{\longleftrightarrow} X(z) = -\frac{1}{1-\alpha z^{-1}}, \qquad \text{ROC: } |z| < |\alpha|$$

ROC sekarang adalah bagian dalam lingkaran yang mempunyai jari-jari $|\alpha|$. Hal ini diperlihatkan pada gambar berikut:

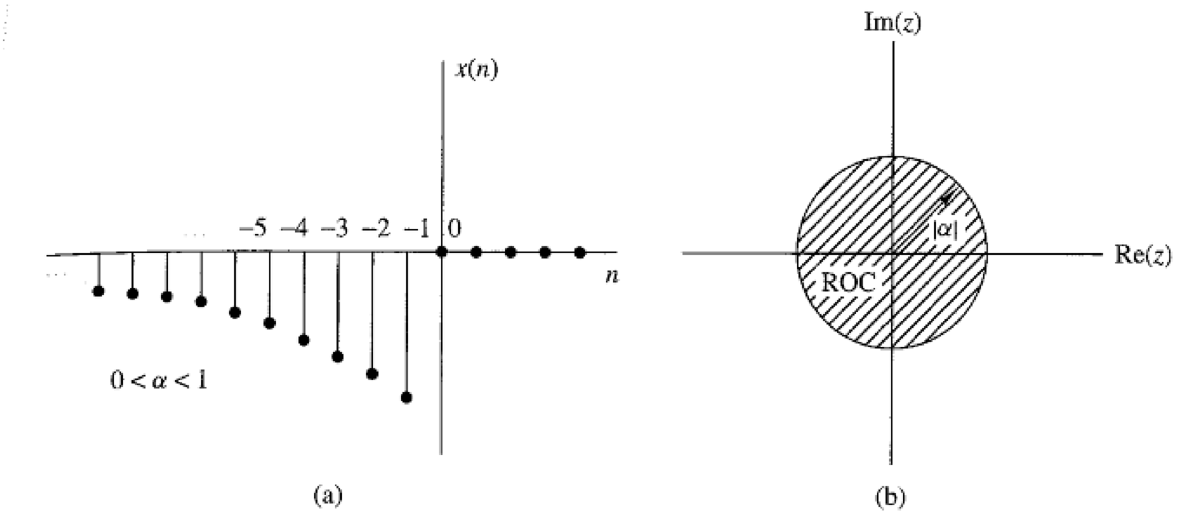


Figure 3.1.3 Anticausal signal $x(n) = -\alpha^n u(-n-1)$ (a), and the ROC of its z-transform (b).

Dari keunikan

$$x(n) = -\alpha^n u(-n-1) \overset{z}{\longleftrightarrow} X(z) = -\frac{1}{1-\alpha z^{-1}}, \qquad \text{ROC: } |z| < |\alpha|$$

Dan

Kita melihat bahwa sinyal kausal α^n u(n) dan sinyal non kausal $-\alpha^n$ u(-n-1) mempunyai persamaan bentuk-tertutup yang sama untuk transformasi-z, yakni

$$\boxed{Z\{\alpha^n u(n)\} = Z\{-\alpha n u(-n-1)\} = \frac{1}{1-\alpha z^{-1}}}$$

Contoh:

Tentukan transformasi-z sinyal

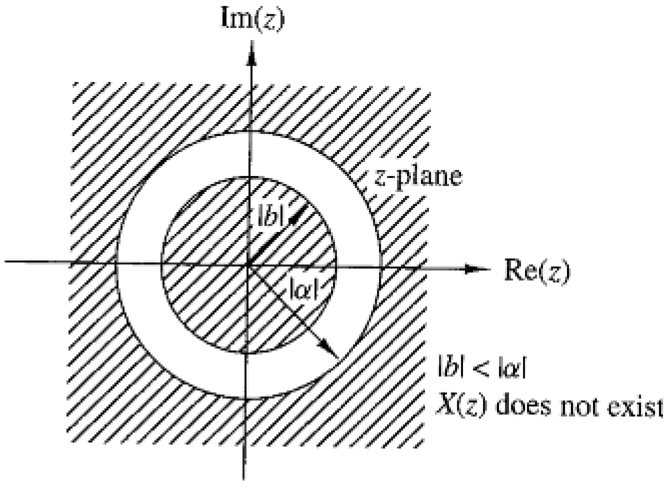
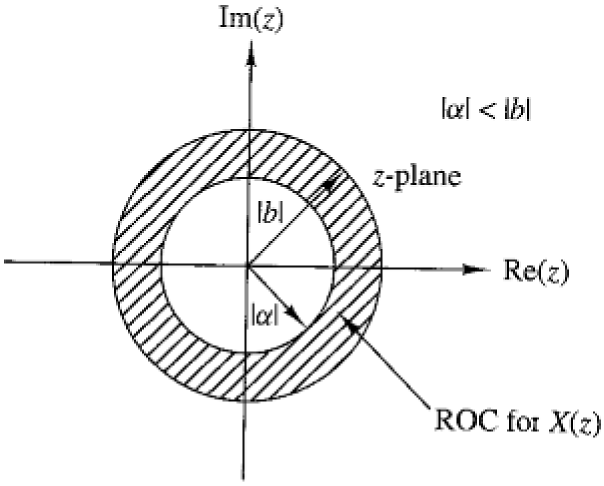
$$x(n) = \alpha^n u(n) + b^n u(-n-1)$$

Jawab:

Dari definisi

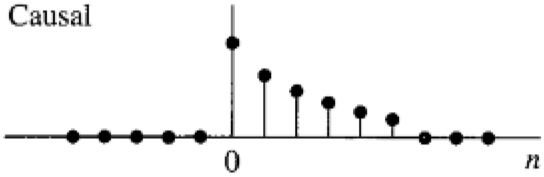
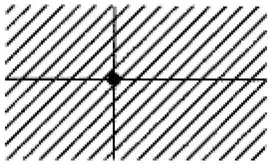
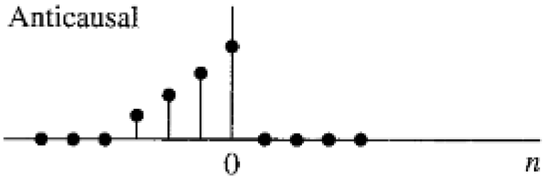
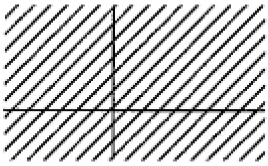
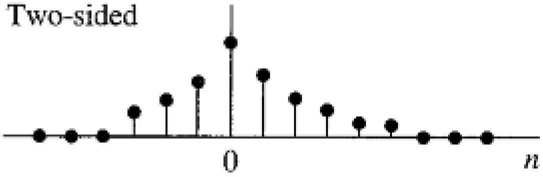
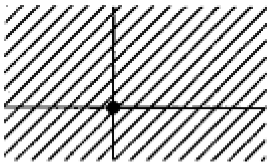
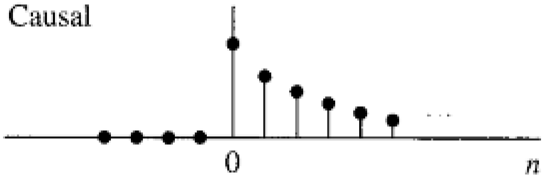
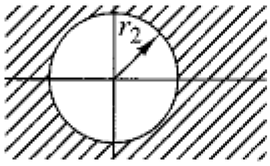
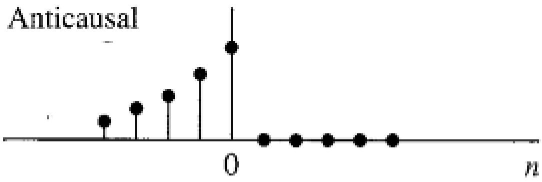
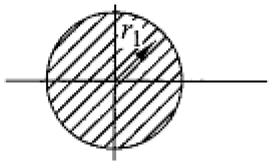
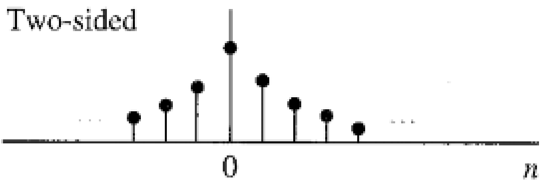
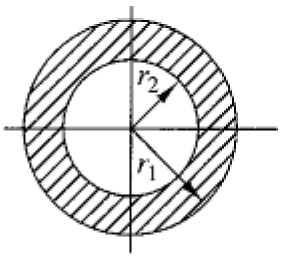
$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n z^{-n} + \sum_{n=-\infty}^{-1} b^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha z^{-1})^n + \sum_{l=1}^{\infty} (b^{-1} z)^l$$

Deret pangkat pertama konvergen jika $|az^{-1}| < 1$ atau $|z| > |a|$. Deret pangkat kedua konvergen jika $|b^{-1}z| < 1$ atau $|z| < |b|$. Dalam menentukan konvergensi X(z), kita perhatikan kasus yang berbeda.

Kasus 1. $|b| < |\alpha|$: dalam kasus ini kedua ROC di atas tidak overlap, seperti gambar di samping. Konsekuensinya kita tidak dapat mencari nilai z untuk kedua deret pengkat konvergen secara simultan. Jelasnya dalam kasus ini X(z) tidak ada.	 (a)
Kasus 2. $|b| > |\alpha|$: dalam kasus ini ada cincin dalam bidang-z dengan kedua deret pangkatnya konvergen secara simultan, seperti diperlihatkan pada gambar di samping. Maka kita memperoleh $X(z) = \frac{1}{1-\alpha z^{-1}} - \frac{1}{1-bz^{-1}} = \frac{b-\alpha}{\alpha + b - z - \alpha b z^{-1}}$ ROC of $X(z)$ is $|\alpha| < |z| < |b|$.	 (b)

Contoh tersebut memperlihatkan bahwa jika ada suatu ROC untuk sinyal dua-sisi durasi tak-berhingga, hal itu adalah cincin (daerah cincin) dalam bidang-z. Dari contoh di atas dapat dilihat bahwa ROC sinyal bergantung pada durasinya (berhingga atau tak-berhingga) dan apakah kausal atau anti kausal, atau dua-sisi. Fakta ini diringkas pada tabel di bawah ini

TABLE 3.1 Characteristic Families of Signals with Their Corresponding ROCs

	Signal	ROC	
	Finite-Duration Signals		
Causal			Entire z-plane except $z = 0$
Anticausal			Entire z-plane except $z = \infty$
Two-sided			Entire z-plane except $z = 0$ and $z = \infty$
	Infinite-Duration Signals		
Causal			$\lvert z\rvert > r_2$
Anticausal			$\lvert z\rvert < r_1$
Two-sided			$r_2 < \lvert z\rvert < r_1$